Keine Ahnung von
Exponential-Ungleichungen

(Potenz-Ungleichungen)

Datei – Nr. 12881

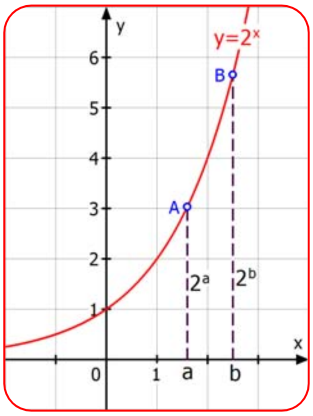
Friedrich Buckel

Stand 3. April 2024

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Einfache Exponential-Ungleichungen



Das Schaubild zeigt den Graph der Funktion $f(x) = 2^x$.

Sie steigt „streng monoton".

Das heißt: Wenn a < b ist, dann auch $2^a < 2^b$ und umgekehrt.

Also folgt aus 3 < 5 die Aussage $2^3 < 2^5$ (8 < 32)

Und umgekehrt folgt aus $2^x < 2^6$ sofort x < 6

mit der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left]-\infty; 6\right[$

In diesem Abschnitt muss es also gelingen, die beiden Seiten der Ungleichung auf die gleiche Basis umzuschreiben

Beispiel 1 $\quad 4^x \leq \frac{1}{2}$

Auf die Basis 2 umschreiben: $4 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$

und: $\frac{1}{2} = 2^{-1}$

Neue Ungleichungsform: $2^{2x} \leq 2^{-1}$ Die Monotonie von $y = 2^x$ besagt:

$2x \leq -1$ ergibt $x \leq -\frac{1}{2}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$

Beispiel 2 $\quad 8^{2x-1} > 4^3$

Auf die Basis 2 umschreiben: $8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad 8^{2x-1} = \left(2^3\right)^{2x-1} = 2^{3(2x-1)} = 2^{6x-3}$

und: $4 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad 4^3 = \left(2^2\right)^3 = 2^6$

Neue Ungleichungsform: $2^{6x-3} > 2^6$

Die Monotonie von $y = 2^x$ besagt: $6x - 3 > 6$ ergibt $6x > 9$

$x > \frac{3}{2}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left]\frac{3}{2} ; \infty\right[$

Beispiel 3 $\quad \sqrt{2}^{x+2} \geq 16^{x/2}$

Auf die Basis 2 umschreiben: $\sqrt{2} = 2^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}^{x+2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x+2} = 2^{\frac{1}{2}(x+2)}$

und: $16 = 2^4 \quad \Rightarrow \quad 16^{x/2} = \left(2^4\right)^{x/2} = 2^{2x}$

Neue Ungleichungsform: $2^{\frac{1}{2}(x+2)} \geq 2^{2x}$

Die Monotonie von $y = 2^x$ besagt: $\frac{1}{2}(x+2) \geq 2x \quad | \cdot 2$

$x + 2 \geq 4x$ ergibt $2 \geq 3x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{2}{3}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$

Beispiel 4 $\quad 2^{-x} < \sqrt{8}$

Auf die Basis 2 umschreiben: $\quad \sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

Neue Ungleichungsform: $\quad 2^{-x} < 2^{\frac{3}{2}}$

Die Monotonie von $y = 2^x$ besagt: $\quad -x < \frac{3}{2} \quad | \cdot(-1)$

$x > -\frac{3}{2}$ $\qquad$ Achtung: Vorzeichen!

Lösungsmenge $\quad \mathbb{L} = \left]-\frac{3}{2}; \infty\right[$

Wenn man unsicher ist, kann man eine Probe mit einer Zahl der Lösungsmenge machen.

Ich wähle für die Probe $x = 2$: $\quad 2^{-2} < \sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^2} < \sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ w. A.

Beispiel 5 $\quad \left(\frac{1}{25}\right)^{x/2} < 125^{1-x}$

Auf die Basis 5 umschreiben: $\quad \frac{1}{25} = 5^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{x/2} = 5^{-2\cdot x/2} = 5^{-x}$

und $\quad 125 = 5^3 \Rightarrow 125^{1-x} = \left(5^3\right)^{1-x} = 5^{3-3x}$

Neue Ungleichungsform: $\quad 5^{-x} < 5^{3-3x}$

Die Monotonie von $y = 5^x$ besagt: $\quad -x < 3 - 3x \quad | +3x$

$2x < 3$

$x < \frac{3}{2}$

Lösungsmenge $\quad \mathbb{L} = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

Beispiel 6 $16^{x^2-3} < 4^x$

Auf die Basis 4 umschreiben: $16 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad 16^{x^2-3} = \left(4^2\right)^{x^2-3} = 4^{2\left(x^2-3\right)}$

Neue Ungleichungsform: $4^{2\left(x^2-3\right)} < 4^x$

Die Monotonie von $y = 4^x$ besagt: $2\left(x^2-3\right) < x$

$$2x^2 - 6 < x$$

$$2x^2 - x - 6 < 0$$

1. Weg: Ich löse eine quadratische Ungleichung nach dem Parabelprinzip:

Die Parabel $y = 2x^2 - x - 6$ ist nach oben geöffnet und hat diese Nullstellen:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-6)}}{4} = \frac{1\pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Zwischen diesen Nullstellen liegt die Parabel unterhalb der x-Achse und hat daher negative y-Koordinaten, wie es die Ungleichung verlangt.

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left] -\frac{3}{2}; 2 \right[$ bzw. in Ungleichungsform: $-\frac{3}{2} < x < 2$.

2. Weg: Ich löse die quadratische Ungleichung mit quadratischer Ergänzung.

$$2x^2 - x - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \tfrac{1}{2}x < 3$$

Quadr: Ergänzung: $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < 3 + \frac{1}{16}$

bzw. $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 < \frac{49}{16} \qquad | \sqrt{}$

$$\left|x - \tfrac{1}{4}\right| < \tfrac{7}{4}$$

Umschreiben in eine Doppelungleichung:

$$-\tfrac{7}{4} < x - \tfrac{1}{4} < \tfrac{7}{4} \qquad | +\tfrac{1}{4}$$

$$-\tfrac{6}{4} < x < \tfrac{8}{4}$$

bzw. $-\frac{3}{2} < x < 2$

Hinweis: Ich zeige diese zweite Lösung für diejenigen, die diese Methode üben wollen. In der Praxis löse ich quadratische Ungleichungen immer mit der eleganten Parabelmethode. Dies ist legitim, denn die Parabel ist ja „nur“ das geometrische Äquivalent zur quadratischen Funktion, und ein wenig Anschauung tut der oft trockenen Mathematik gut!

Zusatz: Wie löst man Ungleichungen, bei denen die beiden Seiten nicht oder nur schwer auf dieselbe Basis umschreibbar sind?

Beispiel: $2^x < 3$

Eine Methode ist es, die Ungleichung zu Logarithmieren:

$$\log\left(2^x\right) = \log(3)$$

Dabei ist es egal, ob man den Zehnerlogarithmus verwendet oder den natürlichen Logarithmus ln.

Nach der 3. Logarithmusregel ist $\log\left(2^x\right) = x \cdot \log(2)$

Das führt zu $x \cdot \log(2) < \log(3)$

also: $x = \dfrac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1{,}58...$

$$\frac{\log 3}{\log 2} \qquad 1.584962501$$

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \qquad 1.584962501$$

Der Screenshot zeigt oben die Lösung mit dem Zehnerlogarithmus und darunter die mit dem natürlichen Logarithmus.